Wykład 8

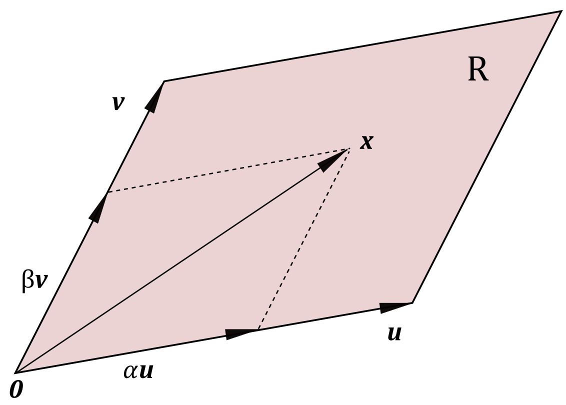
Wyznacznik macierzy kwadratowej

Motywacja

Definicja 1. Niech $u, v \in \mathbb{R}^2$; to znaczy $u = (u_1, u_2) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $v = (v_1, v_2)$. Zbiór

$$R = R(u,v) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \bigvee_{\alpha,\beta \in [0,1]} x = \alpha u + \beta v\}$$

nazywamy *równoległobokiem* rozpiętym na wektorach u, v.



Można wykazać, że pole równoległoboku R jest równe:

$$|R| = \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right) = |u_1 v_2 - u_2 v_1|.$$

We wzorze użyliśmy następujących oznaczeń:

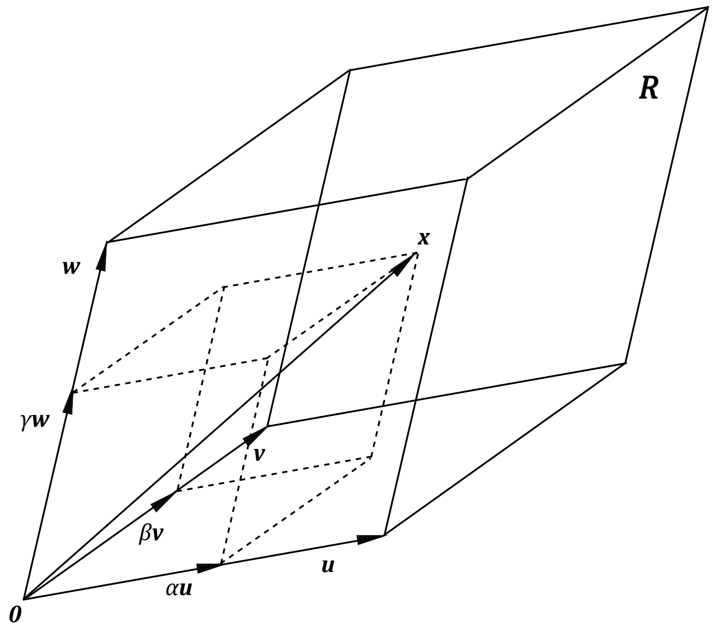
- $\mathrm{abs}(t) -$ wartość bezwzględną liczby t;
- $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$ to, znany ze szkoły, wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$

Definicja 2. Niech $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Zbiór

$$R = R(u,v,w) = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \bigvee_{\alpha,\beta,\gamma \in [0,1]} x = \alpha u + \beta v + \gamma w\}$$

nazywamy *równoległościanem* rozpiętym na wektorach u, v, w.

%



W przyszłości udowodnimy, że objętość równoległościanu R jest równa

$$|R| = \operatorname{abs}\left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}\right),$$

gdzie wielkość

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 - u_3v_2w_1$$

oznacza wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$

Na drodze czysto formalnej wzory te można uogólnić na dowolne przestrzenie $\mathbb{R}^n$. Do tego celu potrzebujemy pojęcia wyznacznika dowolnej macierzy kwadratowej.

Wyznaczniki; twierdzenie Cauchy'ego

Definicja 3. *Wyznacznikiem* macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ nazywamy element ciała $\mathbb{K}$ określony wzorem

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

(Suma rozciąga się po wszystkich permutacjach σ zbioru $\{1,\ldots,n\}$.)

Dalej, zamiast $\sum_{\sigma\in S_n}$ będziemy także pisali krótko $\sum_\sigma$. Zamiast $\det A$ piszemy też $|A|$, a także

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

bądź krótko

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ponieważ $A = [A^1, \ldots, A^n] = (A_1, \ldots, A_n)$, gdzie $A^i -$ kolumny macierzy A zaś A_i jej wiersze, więc wielkość $\det A$ możemy rozpatrywać jako funkcję kolumn względnie wierszy macierzy A:

$$\det A = |A^1, \ldots, A^n| = |A_1, \ldots, A_n|.$$

Twierdzenie 1. Niech $\tau \in S_n$ i niech macierz B powstaje z macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ przez przestawienie kolumn za pomocą τ; to znaczy, $B^i = A^{\tau(i)}$, $i = 1, \ldots, n$. Wtedy

$$\det B = \operatorname{sgn}(\tau) \det A.$$

Innymi słowy,

$$|A^{\tau(1)}, \ldots, A^{\tau(n)}| = \operatorname{sgn}(\tau)|A^1, \ldots, A^n|.$$

Dowód. Z definicji wyznacznika,

$$\det B = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\tau\sigma(1)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)}.$$

Na podstawie twierdzenia 7 wykład 3, $\operatorname{sgn}(\tau)^2 = 1$ oraz $\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau\sigma)$, więc

$$\det B = \operatorname{sgn}(\tau) \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\tau\sigma) a_{1\tau\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma\tau(n)}.$$

Niech $\kappa = \tau\sigma$. Przyporządkowanie $\sigma \mapsto \kappa$ przekształca S_n *na* S_n różnowartościowo; co oznacza, że jeśli σ przebiega S_n, to także κ przebiega S_n. W takim razie

$$\det B = \operatorname{sgn}(\tau) \sum_\kappa \operatorname{sgn}(\kappa) a_{1\kappa(1)} \cdots a_{n\kappa(n)} = \operatorname{sgn}(\tau) \det A. \qquad \square$$

Twierdzenie 2. Niech $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Wtedy

$$\det A^\mathsf{T} = \det A.$$

(Wyznacznik macierzy i jej transpozycji są takie same.)

Dowód. Wyrazy macierzy A^T oznaczmy a_{ij}^T. Stąd $a_{ij}^\mathsf{T} = a_{ji}$. Niech $\sigma \in S_n$. Ponieważ σ^{-1} przekształca $\sigma(1)$ na $1, \ldots, \sigma(n)$ na n, więc

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} = a^\mathsf{T}_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a^\mathsf{T}_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

Co więcej, $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$. Stąd

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a^{\mathsf{T}}_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a^{\mathsf{T}}_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

Zauważmy teraz, że gdy σ przebiega S_n, to $\tau = \sigma^{-1}$ także przebiega S_n. W takim razie

$$\det A = \sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\tau) a^{\mathsf{T}}_{1\tau(1)} \cdots a^{\mathsf{T}}_{n\tau(n)} = \det A^{\mathsf{T}}. \qquad \square$$

Z twierdzenia 2 wynika, że jeśli wyznacznik jako funkcja wierszy ma określoną własność, to ma odpowiednią własność jako funkcja kolumn. Np zachodzi odpowiednik twierdzenia 1:

Twierdzenie 3. Niech $\tau \in S_n$ i niech macierz C powstaje przez przestawienie wierszy macierzy $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ za pomocą τ; to znaczy, $C_i = A_{\tau(i)}$, $i = 1, \ldots, n$. Wtedy

$$\det C = \operatorname{sgn}(\tau) \det A.$$

Innymi słowy,

$$|A_{\tau(1)}, \ldots, A_{\tau(n)}| = \operatorname{sgn}(\tau)|A_1, \ldots, A_n|.$$

Wniosek 4. Jeśli macierz $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ma dwie jednakowe kolumny bądź wiersze i $\chi(\mathbb{K}) \neq 2$, to $\det A = 0$.

Dowód. Przypuśćmy, że k-ta i l-ta kolumny macierzy A są sobie równe. Niech τ oznacza transpozycję k i l: $\tau = (kl)$. Wtedy macierz B powstała przez przestawienie kolumn macierzy A za pomocą τ jest równa A. Stąd $\det B = \det A$. Z drugiej strony, ponieważ $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$, więc na podstawie twierdzenia 1 otrzymamy $\det B = -\det A$. W rezultacie $\det A = -\det A$ a stąd $2\det A = 0$. Ponieważ $\chi(\mathbb{K}) \neq 2$, więc $\det A = 0$.

Dla wierszy rozumowanie przebiega w takim sam sposób. Należy jednak skorzystać z twierdzenia 3 w miejsce twierdzenia 1. $\square$

Przykład 1. Z wniosku 4 wynika, iż $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Rzeczywiście, w wyznaczniku kolumny pierwsza i trzecia są jednakowe.

Twierdzenie 5. Niech $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dla każdego $k \in \{1, \ldots, n\}$, jeśli $A_k = \beta B_k + \gamma C_k$, to

$$\det A = |A_1, \ldots, \beta B_k + \gamma C_k, \ldots, A_n| = \beta|A_1, \ldots, B_k, \ldots, A_n| + \gamma|A_1, \ldots, C_k, \ldots A_n|.$$

Innymi słowy, wyznacznik jest funkcją liniową k-tego wiersza jeśli pozostałe wiersze są ustalone.

Dowód. Oznaczmy i-tą współrzędną wektora B_k przez b_{ki} i podobnie, i-tą współrzędną wektora C_k przez c_{ki}. Z równości $A_k = \beta B_k + \gamma C_k$ wynika, że $a_{ki} = \beta b_{ki} + \gamma c_{ki}$. W takim razie

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} && (1) \\ &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (\beta b_{k\sigma(k)} + \gamma c_{k\sigma(k)}) \cdots a_{n\sigma(n)} && (2) \\ &= \beta \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots b_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \gamma \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots c_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} && (3) \\ &= \beta|A_1, \ldots, B_k, \ldots, A_n| + \gamma|A_1, \ldots, C_k, \ldots, A_n|. && (4) \end{aligned}$$

$\square$

Z twierdzeń 2 i 5 wynika:

Twierdzenie 6. Niech $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dla każdego $k \in \{1,\dots,n\}$, jeśli $A^k = \beta B^k + \gamma C^k$, to

$$\det A = |A^1,\dots,\beta B^k + \gamma C^k,\dots,A^n| = \beta|A^1,\dots,B^k,\dots,A^n| + \gamma|A^1,\dots,C^k,\dots,A^n|.$$

Uwaga 1.

- Twierdzenia 5 i 6 można rozszerzyć do kombinacji liniowych dowolnej liczby składników; w przypadku twierdzenia 6 mamy:

  > Jeśli $A^k = \beta_1 B^{1k} + \beta_2 B^{2k} + \cdots + \beta_m B^{mk}$, to
  >
  > $$\det A = |A^1,\dots,\sum_{i=1}^{m}\beta_i B^{ik},\dots,A^n| = \sum_{i=1}^{m}\beta_i|A^1,\dots,B^{ik},\dots,A^n|.$$

- Stąd i z wniosku 4 można otrzymamy kolejny, bardzo ważny dla praktyki rachunkowej, wniosek.

  > Niech $\chi(\mathbb{K}) \neq 2$. Jeśli do kolumny A^k macierzy $A \in \mathsf{M}(\mathbb{K})$ dodać dowolną kombinację liniową pozostałych kolumn, to wyznacznik otrzymanej macierzy jest równy wyznacznikowi macierzy A.

Dowód.

$$|A^1,\dots,A^{k-1},A^k + \sum_{i\neq k}\alpha_i A^i, A^{k+1},\dots,A^n| = \det A + \sum_{i\neq k}\alpha_i|A^1,\dots,A^{k-1},A^i,A^{k+1},\dots,A^n$$

Każdy wyznacznik $|A^1,\dots,A^{k-1},A^i,A^{k+1},\dots,A^n|$ ma dwie identyczne kolumny: na i-tym i na k-tym miejscu, stąd musi być równy zero. W reultacie prawa strona jest równa $\det A$.

Twierdzenie 7. Niech $A, B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ i niech $\chi(\mathbb{K}) \neq 2$. Wtedy

$$|b_{11}A^1 + \cdots + b_{n1}A^n, b_{12}A^1 + \cdots + b_{n2}A^n,\dots,b_{1n}A^1 + \cdots + b_{nn}A^n| = \det A \det B.$$

Dowód. Niech X oznacza zbiór wszystkich funkcji $f\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$. Niech Λ oznacza wartość lewej strony dowodzonej równości. Z liniowości wyznacznika jako funkcji kolumn (twierdzenie 6) wynika, że Λ możemy zapisać jak następuje:

$$\Lambda = \sum_{f\in X} b_{f(1)1}\cdots b_{f(n)n}|A^{f(1)},\dots,A^{f(n)}|.$$

Jeśli f nie jest bijekcją, to istnieje para k, l, że $f(k) = f(l)$. Wtedy macierz $[A^{f(1)},\dots,A^{f(n)}]$ ma dwie jednakowe kolumny. Na mocy założenia $\chi(\mathbb{K}) \neq 2$ i wniosku 4, $|A^{f(1)},\dots,A^{f(n)}| = 0$. W rezultacie w wyrażeniu na Λ sumowanie możemy ograniczyć do funkcji f, będących permutacjami (=bijekcjami) zbioru $\{1,\dots,n\}$. Stąd

$$\Lambda = \sum_{\sigma\in S_n} b_{\sigma(1)1}\cdots b_{\sigma(n)n}|A^{\sigma(1)},\dots,A^{\sigma(n)}|$$

I dalej, na podstawie twierdzeń 1 i 2 mamy

$$\Lambda = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n} \det A \tag{5}$$

$$= \det A \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) b^{\mathsf{T}}_{1\sigma(1)} \cdots b^{\mathsf{T}}_{n\sigma(n)} \tag{6}$$

$$= \det A \det B^{\mathsf{T}} = \det A \det B \tag{7}$$

□

Twierdzenie 8 (Cauchy). Niech $A, B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ i niech $\chi(\mathbb{K}) \neq 2$. Wtedy

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Dowód. Niech $C = AB$. Zgodnie z definicją mnożenia macierzy, i-ta współrzędna j-tej kolumny macierzy C wyraża się w następujący sposób:

$$(C^j)_i = c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} (A^k)_i = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj} A^k \right)_i$$

Stąd

$$C^j = b_{1j} A^1 + \cdots + b_{nj} A^n, \quad \text{dla } j = 1, \ldots, n$$

Na podstawie twierdzenia 7

$$\det(AB) = \det C = \det A \det B.$$

□

Stwierdzenie 9. Niech $I \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ będzie macierzą jednostkową; to znaczy, $I = [\delta_{ij}]$ (patrz: przykład 2, wykład 5). Wtedy

$$\det I = 1.$$

Mamy

$$\det I = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \delta_{1\sigma(1)} \cdots \delta_{n\sigma(n)}.$$

Wobec definicji delty Kroneckera, jeśli składnik tej sumy jest niezerowy, to odpowiada on σ spełniającej zależności: $\sigma(1) = 1, \ldots, \sigma(n) = n$; to znaczy, $\sigma = \varepsilon$. Ponieważ $\operatorname{sgn}(\varepsilon) = 1$, więc

$$\det I = \operatorname{sgn}(\varepsilon) \delta_{11} \cdots \delta_{nn} = 1.$$

□

Wniosek 10. Niech $\chi(\mathbb{K}) \neq 2$. Jeśli macierz $B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ jest odwracalna; to znaczy, istnieje $B^{-1} \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, że $BB^{-1} = B^{-1}B = I$, to

1. $\det B^{-1} = \dfrac{1}{\det B}$; w szczególności, $\det B \neq 0$;
2. dla dowolnej macierzy $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$

$$\det A = \det(B^{-1}AB).$$

Dowód. Ćwiczenie na zastosowanie twierdzenia Cauchy'go.

Uwaga 2. Wniosek 10 głosi, że macierze podobne mają ten sam wyznacznik (patrz: definicja 5, wykład 6).